

$M \in \mathbb{K}^{n,n}$ è invertibile $\Leftrightarrow \det M \neq 0$
 in tale caso $M \in GL(n, \mathbb{K})$
 $\rightarrow$ inversa si può calcolare con il metodo di Gauss.

II Teorema di Laplace

$$M \in \mathbb{K}^{n,n}$$

$$\det M \text{ se } k=j$$

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} (-1)^{i+j} |M_{ik}| = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

Dim se $k=j \Rightarrow$ I Teorema di Laplace.

se $k \neq j \Rightarrow$ viene il det. di una matrice in cui la colonna

j compare 2 volte $\Rightarrow$ è zero $\square$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\uparrow$

j=1 k=2

$$\Rightarrow a_{11} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} (-1)^{1+3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

$\uparrow$
colonne uguali

Sia $A \in K^{n,n}$

$$\Gamma_{ij} := (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

$$A^a = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \dots & \Gamma_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema:

$$A \cdot \overbrace{A^a} = \det(A) \cdot I$$

↓ l'enkrata i, j in questa matrice

Dim:

$$\begin{aligned} i \left[a_{i1} \dots a_{in} \right] \begin{bmatrix} \Gamma_{j1} \\ \vdots \\ \Gamma_{jn} \end{bmatrix} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \Gamma_{jk} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} |A_{jk}| \quad \square \end{aligned}$$

CONSEGUENZE

$$\det(A) \neq 0$$

$$A^{-1} = ({}^t A^a) \cdot \frac{1}{\det A}$$

Prop. di $\det$. da ricordare

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertibile

$\Leftrightarrow$ le colonne di A sono libere.

$\Leftrightarrow$ le colonne (righe) di A sono una base di $\mathbb{K}^n$.

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A) = \det({}^t A).$$

$$\det(I) = 1$$

• $\det$ è multilineare nelle colonne.

• $\det$ è alternante cioè se ci sono 2 colonne

uguali $\Rightarrow \det(A) = 0$.

#

rank di $f: V \rightarrow W$ lineare

$$:= \dim(\operatorname{Im} f).$$

Sia A una matrice che rappresenta f rispetto opportune

basi di V e W . (B_V, B_W)

$\operatorname{Im}(f)$ è generata dai vettori che hanno rispetto B_W componenti date dalle colonne di A .

$$[c_1 \dots c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 c_1 + \dots + x_n c_n$$

$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathcal{L}_c(A)$ ove $\mathcal{L}_c(A) = \text{sp. vett.}$
generata dalle
colonne di A .

$$\operatorname{rk}(A) := \dim \mathcal{L}_c(A).$$

Def: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Si dice rank di A il numero intero non negativo

$$\text{rk}(A) := \dim \mathcal{L}_c(A).$$

Teorema (di Kronecker): Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ e chiamiamo

$\rho(A)$ l'ordine massimo di un minore quadrato M contenuto in A con $\det(M) \neq 0$.

Allora $\boxed{\rho(A) = \text{rk}(A)}$.

Corollario: $\text{rk}(A) = \rho(A) = \rho(A^T) = \text{rk}(A^T) =$

$$= \dim \mathcal{L}_c(A^T) = \dim \mathcal{L}_r(A).$$

sp. vett. generato dalle
righe di A .

Lemma: Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ una matrice.

Allora le colonne di A sono linearmente indipendenti se e solamente se A contiene un minore $H_{n \times n}$ con $\det(H) \neq 0$.

Dim: Se $n > m \Rightarrow$ le colonne di A sono n^{a} vettori in

$\mathbb{K}^m \Rightarrow$ esse sono necessariamente legate.

($\dim \mathbb{K}^m < n$).

Se $n = m \Rightarrow$ le colonne di A sono l'intera

c.s. esse sono una base

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ e l'unico minore

$m \times m$ contenuto in A è A stessa.

Supponiamo $n < m$.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{C_1} & \boxed{C_2} & \dots & \boxed{C_k} & \dots & \boxed{C_n} \end{bmatrix}$$

La k -esima

Le colonne di A sono legate $\Rightarrow$ una di esse è

c. lineare delle rimanenti. Ogni minore M $n \times n$

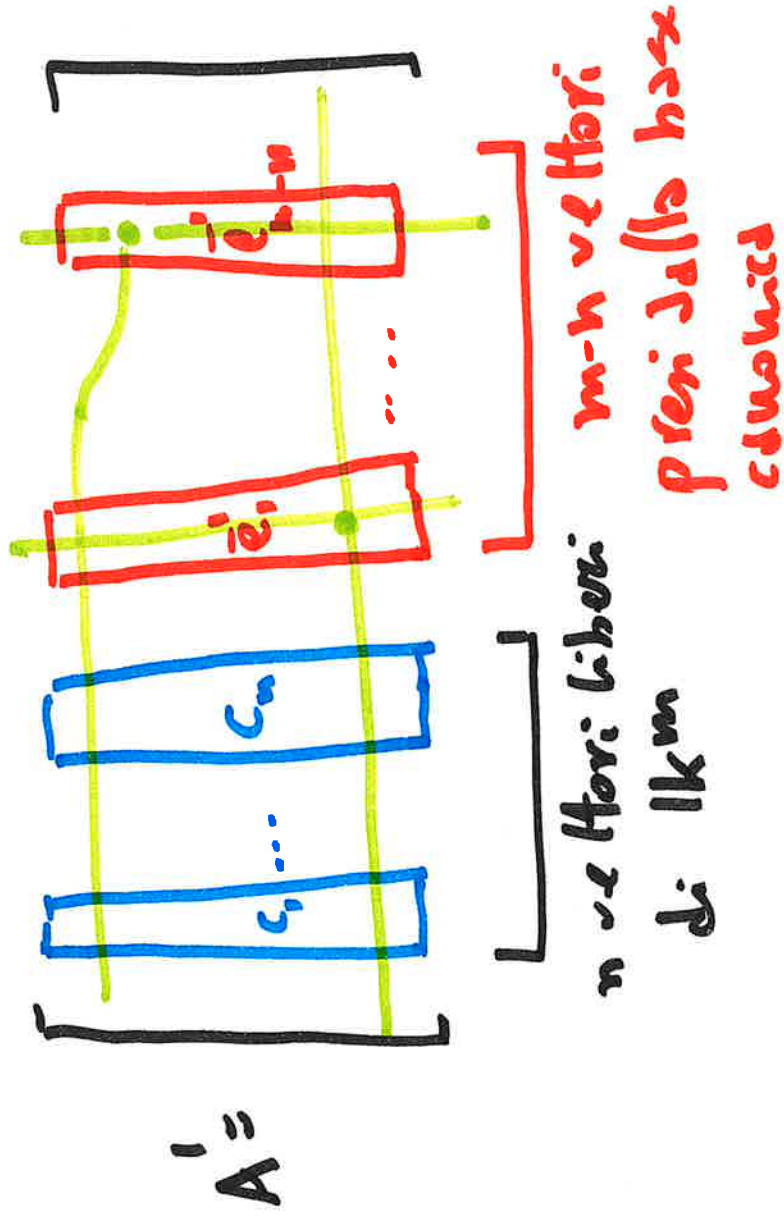
di A si ottiene cancellando $m-n$ righe di A

$\Rightarrow$ in tale minore la k -esima colonna sarà ancora

c. lineare delle rimanenti $\Rightarrow \det M = 0$.

Dobbiamo vedere che accade se c'è colonne di A

sono un sistema lineare di k .



Completiamo a base il sistema di vettori $c_2 \dots c_n$ prendendo $(m-n)$ vettori dalla base canonica di $\mathbb{K}^m$

Le colonne di A' sono una base di $\mathbb{K}^m$

$\Rightarrow \det A' \neq 0$.

Sviluppiamo $\det(A')$ a partire dall'ultima colonna aggiungendo $\rightarrow$ poiché questa colonna ha solo una entrata $\neq 1 \neq 0 \Rightarrow \det A' = \pm \det A''$ con A'' matrice ottenuta cancellando

tutte colonne e la riga corrispondente l'esistenza non nulla; adesso si passa alla prima colonna aggiunta etc.

Dopo $m-n$ passaggi ci resta $\det(A') = \pm \det(\tilde{A})$ ove $\tilde{A}$ si ottiene da A' cancellando le $m-n$ colonne aggiunte e corrispondenti $(m-n)$ righe $\Rightarrow \tilde{A}$ è un minore di A di ordine n maggiore $m - (m-n) = n$ con $\det A \neq 0$. $\square$

Esempio

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 2 - 15 \neq 0$$

Teorema: $\rho(A) = \text{rk}(A) = \dim L_c(A)$.

DIM: Supponiamo $\dim L_c(A) > \rho(A)$

$\Rightarrow$ ci sono in A almeno $\rho(A) + 1$

colonne indipendenti $\Rightarrow$ la matrice A'

formata da queste $\rho(A) + 1$ colonne

ha tutte indipendenti $\Rightarrow$ per il Lemma

deve contenere un minore M ($\rho(A) + 1 \times$

$(\rho(A) + 1)$) con $\det \neq 0$. by perdi

M è anche minore di A e $\rho(A) < \rho(A) + 1$.

Viceversa, se $\rho(A) > \dim L_c(A) \Rightarrow A$
contiene un minore M di ordine $\rho(A)$

con $\det M \neq 0 \Rightarrow$ Le sottomatrici di A
 formate dalle colonne distinte intercalate
 da M colonne di $P(A) \geq \dim L_c(A) + 1$
 colonne lin. indip. $\Rightarrow$ queste colonne
 generano un sottospazio di $L_c(A)$ di
 dimensione $\geq \dim L_c(A) + 1 > \dim L_c(A)$ v.

$\Rightarrow$ NE SEGUE $\text{rk}(A) = \dim L_c(A) = \underline{P(A)}$ D

oss: Se in una matrice A tutti i minori $t \times t$ sono
 di $\det = 0 \Rightarrow \text{rk}(A) < t$

[Da Laplace]

ALGORITMO PER IL CALCOLO DEL RANGO:

1) Testare se c'è un minore $k \times k$ in A con $\det \neq 0$

$\rightarrow$ se $n \rightarrow rk(A) \geq k$

se no $\Rightarrow rk(A) < k$.

se $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. $rk(A) \leq \min(m,n)$

in questo $\mathcal{L}_C(A) \leq \mathbb{K}^m \Rightarrow \dim \leq m$

$\mathcal{L}_R(A) \leq \mathbb{K}^n \Rightarrow \dim \leq n$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}_C(A) = \dim \mathcal{L}_R(A) \leq \min(m,n)$.

⚠ N.B.: In generale $\mathcal{L}_C(A) \neq \mathcal{L}_R(A)$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{L}_C(A) = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix})$

$\mathcal{L}_R(A) = \mathcal{L}((134), (201))$.

$\rightarrow i \leftarrow \min(m, n)$

$\exists$ Minore $i \times i$ con $\det \neq 0$

"Dall'alto"

sì $\rightarrow \text{rk}(A) = i$

no $\rightarrow i \leftarrow i - 1$

$\rightarrow i = 1$

$\exists$ Minore $i \times i$ con $\det \neq 0$

"Dal basso"

no $\rightarrow \text{rk}(A) = i - 1$

sì $\rightarrow i \leftarrow i + 1$

Teorema degli orlati: Una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ha rango

$k \Leftrightarrow A$ contiene un minore $M_{k \times k}$ con $\det M \neq 0$

e ogni minore di A di ordine $(k+1) \times (k+1)$ che contiene M

ha $\det = 0$.

$i = 1$

$\exists$ Minore 1×1 con $\det \neq 0$

no $\rightarrow \text{rk}(A) = i - 1$

sì $\rightarrow M' = \text{minore } i \times i$ con $\det M' \neq 0$

$\rightarrow \exists$ Minore $(i+1) \times (i+1)$ contenente M' con

$\det M'' \neq 0$

no $\rightarrow \text{rk}(A) = i$

sì $\rightarrow i \leftarrow i + 1$

$M' \leftarrow M''$

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 7 & 3 & 5 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\
 1 & 1 & 7 & 2 & 4 & 0 & 0 & 8 & -1
 \end{array}$$

$$\text{rk}(A) = 2$$

DIM (orlati).

$\exists M \text{ } k \times k \text{ con } \det M \neq 0$

$\forall \text{ } \text{rk}(A) = k \Rightarrow$ ogni minore $(k+1) \times (k+1)$ ha

$\det = 0$; in particolare gli

orlati di $M \Rightarrow 0 \times k$.

I Supponiamo che $\exists M$ contenuto in $A \quad M \in k^{k \times k}$

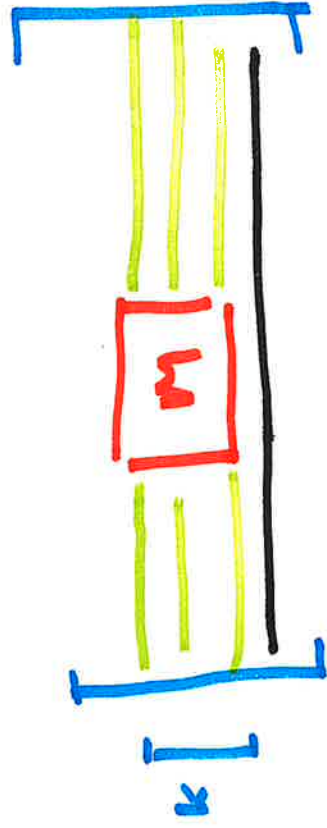
con $\det M \neq 0$ e che ogni orlato abbia $\det = 0$

$$\Rightarrow \text{rk}(A) = k.$$

per assurdo, supponiamo $\text{rk}(A) > k \Rightarrow \text{rk}(A) \geq k+1$

In particolare la sp. vettoriale $L_R(A)$ ha almeno $\dim k+1$

Le righe di A intercettano
dal minore M non libere
 $\Rightarrow$ possiamo usare il
complemento della base trovata



una ulteriore riga di A che è indipendente dalle righe
delle. $\Rightarrow$ costruiamo una nuova matrice A'
formata dalle k righe intercettate da M + questa riga.

$$A' \in \mathbb{K}^{k+1, n}$$



$$\dim L_R(A') = k+1 = \dim L_R(A')$$

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} \boxed{M} & \text{---} \\ \hline \text{---} & \text{---} \end{array} \right]$$

k

Le colonne di A' intercalate da M sono indipendenti
 $\Rightarrow$ io posso completarle a base di $\mathcal{L}_c(A')$ aggiungendo
 una colonna opportuna. $\dim \mathcal{L}_c(A') = k+1$

Adesso osserviamo che il minore che si ottiene
 aggiungendo alle colonne di A' intercalate da M
 questa colonna aggiunta:

- 1) è $(k+1) \times (k+1)$
- 2) contiene M
- 3) ha $\det \neq 0$ perché le sue colonne sono
 una base di $\mathcal{L}_c(A')$

ma questo è anche un orlo di M in A

$\Rightarrow$ È un orlo di M che ha $\det \neq 0$ $\square$

$\square$